Mostriamo max |M| ≥ max v(f)

Sia k il valore del flusso massimo in G'. Poiché ∀e spettanti a G' vale che c(e) ∈ {0,1} sappiamo che esiste un flusso massimo f a valori interi, ovvero f(e) ∈ {0,1} ∀e.

Sia M = { e = (a,b) : a ∈ S, b ∈ D, f(e) = 1 }, l'insieme degli archi che vanno da vertici in S a vertici in D, che trasportano un'unità di flusso. Dato che k unità di flusso fuoriescono da s, per il vincolo sulla conservazione del flusso k ne devono arrivare a t, e dato che non ci sono archi diretti da s a t, abbiamo bisogno di k unità di flusso da S a D. Gli archi in M formano un matching (ovvero su ogni vertice di S incide al più uno di tali archi, ed analogamente i vertici in D). Ciò sempre per la legge della conservazione del flusso. Quindi k = |M| ≤ cardinalità massima del matching.

Esercizio 5.1

Cammini disgiunti in grafi

Il problema consiste nel trovare all'interno di un grafo (diretto) G = (V, E) e due nodi s e t, il numero massimo di cammini da s a t che sono arco-disgiunti, cioè che non hanno nessun arco in comune, sarà uguale al valore del massimo flusso in G da s a t. Supponiamo che in G esistono k cammini da s a t in G che sono arco disgiunti, assegniamo flusso 1 ad ogni arco in tale cammino e flusso 0 a tutti gli altri archi di G. Pertanto i vincoli sui flussi sono rispettati e quindi il massimo numero di cammini da s a t in G che sono arco disgiunti ≤ valore del massimo flusso in G da s a t.

L'insieme degli archi e con f(e) = 1 contiene un insieme di v(f) cammini arco-disgiunti da s a t. Iniziamo col seguire gli archi con flusso 1 che partono da s. Per il vincolo sulla conservazione del flusso, ogni qualvolta un tale arco entra in un nodo v, da tale nodo ne deve uscire un ~~nodo~~ altro ~~arco~~ arco con flusso 1. Prima o poi troveremo un cammino da s a