$\log n^c$, con $c>1$

Sappiamo che $\log_n^c = c \log n$ e $\log n \leq cn$ per $c>0$, quindi
$\log n^c = c\log n \leq c c n$ avremo $\log n^c = O(n)$

ma

$\forall$ costante $a>0$, $b>0$, $k>0$ vale $\log^a n^b = O(n^k)$

$\log^5 n^6 = O(\sqrt[3]{n})$ $a=5$, $b=6$ $k=1/3$

Per provare per ogni $a, b, k>0$ $\log^a n^b = O(n^k)$

$\exists c, n_0 : (\log n^b)^a \leq c n^k \quad \forall n \geq n_0$

Proviamo per $a=1$ ricordiamo che $\log x^y = y \log x$, e che $\log x \leq dx$
pertanto

$$(\log n^b) = (b \log n) = \left(b\frac{1}{k} \cdot k \log n\right) = \left(b\frac{1}{k} \cdot \log n^k\right) \leq b\frac{1}{k} d n^k$$

provando per $a=1$ (ma $\forall k$), con $c = (bd)/k$.

In generale, usando $a=1$, b arbitrario e k/a avremo

$$(\log n^b)^a \leq (cn^{(k/a)})^a = c^a n^k$$

Vale che $\forall k>0$, $a>1$ $n^k = O(a^n)$
Dobbiamo provare che $\exists c, n_0 : n^k \leq c a^n$, $\forall n \geq n_0$
Osserviamo che
$n^k \leq n^{n/\log_a n}$, $\forall n : k \leq (n/\log_a n)$

Quindi:
$$n^k \leq n^{n/\log_a n} = \left(a^{\log_a n}\right)^{n/\log_a n} = a^{n \log_a n/\log_a n} = a^n$$